数学コラム(24)

$$\mathbf{1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}}$$

西山豊

なんとも奇妙な数式である．大栗博司『大栗先生の超弦理論入門』(講談社ブルーバックス) を読んでいたら, その 111 ページに標記のような式があった．左辺は単調増加で無限大に発散するはずである．ところが無限大どころか負の値になるというのだ．ネットで調べてみたら，同じような式があった.

$$1+8+27+64+\cdots=\frac{1}{120}$$

この式は超弦理論で使われていて，カシミール効果という物理現象が 1997 年にラモローらによって実証されたという.

よく知られているように，調和級数は無限大に発散する.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$$

この式は，積み木問題としても登場する．つまり，積み木を横にずらして上に積んでいったとき，どこまでずらすことができるかという問題で，下から 2 分の 1,3 分の 1，4 分の 1 とずらして積むといくらでもずらして積むことができる．無限大に発散する速度は log のオーダーであるので遅いが，理論的には無限にずらすことができる.

また，オイラーが 1735 年に証明したバーゼル問題は有名である．調和級数の各分母を自乗すると，この級数は$\frac{\pi^2}{6}$ に収束するのである.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

ここまでは, 大学 1～2 年生までの数学で, 常識の範囲内である．大学３～４年生になるとゼータ関数という新しい数学を学ぶ．s を複素数としてつぎの式 ζ(s) を考え,

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

これをゼータ関数とよぶ.

実数の範囲では，$s>1$では有限な値をとり，$s\leq 1$では無限大に発散するので，関数の定義域は$s>1$となるが，オイラーは次のような手法でζ(s) の定義域を拡張した.

初項 1 , 公比 x の無限等比級数はつぎの式となる.

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

この式が成り立つのは　$|x|<1$であり, $|x|\geq 1$では成り立たない. そこでオイラーは次のように考えた. 確かに$x=1$を代入すれば右辺の分母は 0 になり，無限大となる．ところが，$x=-1$を代入すると，次のようなそれなりの関係式となる.

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

(1)式の両辺を微分した式は(3)となり,

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (3)$$

この式に $x=-1$を代入すると

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4} \qquad (4)$$

となる．(4)式と

$$\begin{aligned}&1-2+3-4+\cdots\\&=(1+2+3+4+\cdots)-2\times(2+4+\cdots)\\&=-3\times(1+2+3+4+\cdots)\end{aligned}$$

により，冒頭の

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$$

が導出される．このような手法を解析接続という.

オイラーが考案した関数の定義域の拡張方法を，後にリーマンがゼータ関数として確立した．このことにより，ゼータ関数ζ(s)は$s=1$以外のすべての複素数で有限の値を持ち，定義されることになる.

このような関数の拡張方法は非ユークリッド幾何学が誕生した経過に似ている．ユークリッド幾何学の第五公準である平行線に関する公準を否定することで非ユークリッド幾何学が生まれるが，両者が矛盾なく同時に成り立つことを考えると，解析接続で拡張されたゼータ関数も不思議ではなくなる.

(にしやまゆたか／大阪経済大学)